Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
M1 Théorie de Galois **Maria Chlouveraki**

Anneaux et polynômes - TD 1

1. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que $\mathrm{Im} f$ est un sous-anneau de S.

2. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un idéal de R.

3. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de S. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de R.

4. Soit R un anneau avec $0_R \neq 1_R$. L'anneau R est un corps si et seulement si R a exactement deux idéaux: $\{0_R\}$ et R.

5. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si R est un corps, alors f est injectif.

6. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si S est un anneau intègre, alors $\mathrm{Ker} f$ est un idéal premier de R.

7. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x-1) \cong \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{Q}^2$; $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{Q}[i]$.

8. Montrer que R est un anneau intègre si et seulement si $R[x]$ est un anneau intègre. Montrer que $R[x]$ n'est jamais un corps, et déterminer ses éléments inversibles.

9. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(m) \cap (n) = (\mathrm{ppcm}(m,n))$ et $(m,n) = (\mathrm{pgcd}(m,n))$ (utiliser le fait que $\mathrm{pgcd}(m,n) = am + bn$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$).

10. Soient $f(x), g(x) \in k[x]$, où k est un corps. Montrer que $(f(x)) \cap (g(x)) = (\mathrm{ppcm}(f(x), g(x)))$ et $(f(x), g(x)) = (\mathrm{pgcd}(f(x), g(x)))$.

11. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$ avec $f(x) \notin k$. L'idéal $(f(x))$ est maximal si et seulement si $(f(x))$ est premier, qui est vrai si et seulement si $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.

12. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$. Montrer que si $\deg f(x) \in \{2, 3\}$ et $f(x)$ n'a pas de racines dans k, alors $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.

13. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Le polynôme $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ si et seulement si $\deg f(x) = 1$ ou $\deg f(x) = 2$ et $f(x)$ n'a pas de racines réelles.

14. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Si $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$, alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$. La réciproque est vraie seulement si $f(x)$ est primitif, c'est-à-dire, il n'existe pas $n \in \mathbb{N}_{>1}$ tel que $f(x) \in n\mathbb{Z}[x]$.

15. Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ avec $a_n \neq 0$. S'il existe un nombre premier p tel que

(i) p divise $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$,

(ii) p ne divise pas a_n, et

(iii) p^2 ne divise pas a_0,

alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ ("critère de Eisenstein").